**Введение.** Рассмотрим систему уравнений движения для определения горизонтальных компонент вектора скорости [1]. Для удобства запишем эту систему уравнений в комплексной форме:









где , , . Система уравнений - рассматривается в трехмерной области , где  – двумерная область, расположенная в плоскости  (зеркало водоема), функция  описывает рельеф дна. Также в - приняты следующие обозначения: *u* и *v* – компоненты горизонтального вектора скорости течений, соответствующие осям *x* и y;  – давление на невозмущенной поверхности ; ,  – плотность и ее среднее значение;  и  – члены, отвечающие за адвективный перенос и горизонтальную диффузию;  – параметр Кориолиса;  – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости;  – компоненты касательного напряжения трения ветра. В принимается параметризация придонного трения следующего вида:



где *U* и *V* – интегральные скорости:



Общепринятый метод расчета горизонтальных компонент *u* и *v* вектора скорости использует их представление в виде суммы баротропной и бароклинной составляющих [1]:



где  – баротропные компоненты,  – бароклинные компоненты.

В работе [2] приводится разностная схема для расчета баротропной компоненты скорости. В настоящей работе будет разработана разностная схема для расчета бароклинной компоненты скорости.

**Разностная схема для бароклинной компоненты.** Для аппроксимации уравнения по пространственной переменной используем проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ) [3]. C этой целью рассмотрим, вообще говоря, неравномерную сетку  с шагами  и числом узлов , зависящим от фиксированной горизонтальной координаты  как от параметра. Умножим уравнение на произвольную тестовую функцию  и проинтегрируем полученное уравнение по сеточной ячейке :



Функцию  на каждой сеточной ячейке  будем выбирать так, чтобы обнулить интеграл , т.е. в виде функции . Рассмотрим две различные тестовые функции  и , удовлетворяющие условиям:

; .

Такие функции легко отыскать:



Полагая в  и заменяя в интегралах значения функции  в сеточной ячейке ее значением на левой границе, получим:



Аналогично, подставляя в  и заменяя в интегралах значения функции  ее значением на правой границе, получим:



В и приняты следующие обозначения: .

Для аппроксимации уравнений и по временной переменной используем однопараметрическое семейство разностных схем. Пусть  – шаг по времени, а  – текущий временной слой. Учет  будем считать неявным, а  будем рассматривать в момент времени . Тогда уравнение и можно переписать в следующем виде:





где  – оператор разностного дифференцирования,  – оператор осреднения с параметром , .

Складывая уравнения и , заменив в  на , получим разностные уравнения для аппроксимации уравнения во внутренних узлах сетки ():



Полагая в  и используя краевые условия для вычисления значения , получим уравнение для аппроксимации левого краевого условия:



Аналогично, полагая в  и используя краевые условия для вычисления значения , получим уравнение для аппроксимации правого краевого условия:



Рассмотрим вспомогательную функцию , которая является решением задачи, отличающейся от - только отсутствием величин  в правой части. Значение функции  в момент времени  совпадает со значением функции , т.е. . Можно доказать, что бароклинная компонента функции  совпадает с бароклинной компонентой функции :



**Доказательство формулы .** Для упрощения предположим, что сетка по  равномерная с шагом , и выпишем задачу для функции :







где . Рассмотрим вспомогательную функцию:



Заметим, что функция удовлетворяет соотношениям -, и, если решение задачи - единственно, то . Так как  не зависит от , то соотношение становится очевидным.

Для завершения рассуждений достаточно доказать единственность решения задачи -. Пусть  – решение - при . Покажем, что тогда . Для этого воспользуемся следующей леммой.

***Лемма****.* Пусть имеется задача , где  – оператор вида , и существует такое число , что выполняется неравенство:

.

Тогда для функции  существует оценка вида:



Систему уравнений - можно записать в канонической форме [4]. Тогда, согласно данной лемме, если сможем найти , такое что выполнено неравенство



то для функции  будет справедлива оценка , т.е.



Так как для доказательства единственности мы положили , то получаем . Осталось найти такое , чтобы было выполнено неравенство .

Неравенство для задачи - имеет следующий вид:



Нужно показать, что выражение под модулем больше единицы. Сделаем это для случая, когда . Выражение под модулем путем ряда стандартных преобразований может быть записано в следующем виде:



где . Так как под корнем все слагаемые положительные и можно найти такие  и , что выражение под корнем будет больше единицы, то получаем, что неравенство выполнено для любого .

**Численные эксперименты: расчет бароклинной компоненты.** Для демонстрации работы построенной разностной схемы приведем результаты расчетов для тестовой задачи из работы [5]. Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров задачи:



Относительная погрешность вычислялась по формуле:



где  – точное и приближенное решения соответственно. Разностная схема тестировалась при ,  (число узлов по осям *Ox* и *Oy*, соответственно) и различных значениях параметров  (число узлов по оси *Oz*) и  (шаг по времени). Также варьировался параметр схемы . Были рассмотрены два варианта выбора данного параметра:  и .

На рисунках 1 и 2 приведены графики погрешностей вычисления *u* и *v* компонент бароклинной составляющей скорости при , , . По оси абсцисс идет время, а по оси ординат – погрешность. Из графиков видно, что погрешность сначала растет до определенного момента времени, после чего снижается до некоторого уровня и далее практически не изменяется. Назовем этот конечный уровень погрешности, после которого она практически не изменяется, финальной погрешностью.

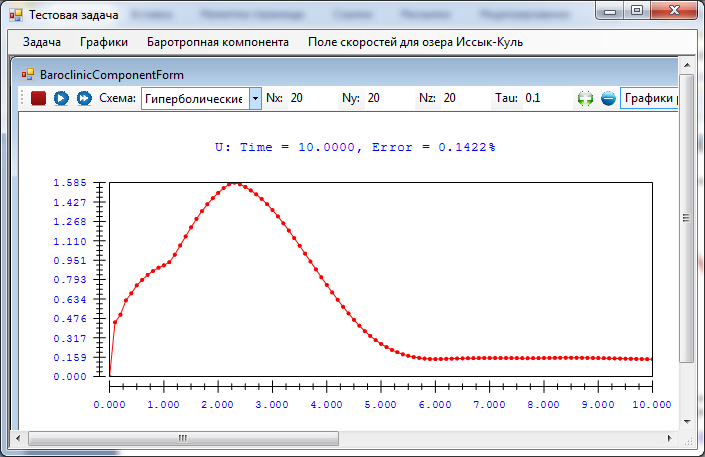


Рисунок 1 – Погрешность *u*-компоненты при , , .

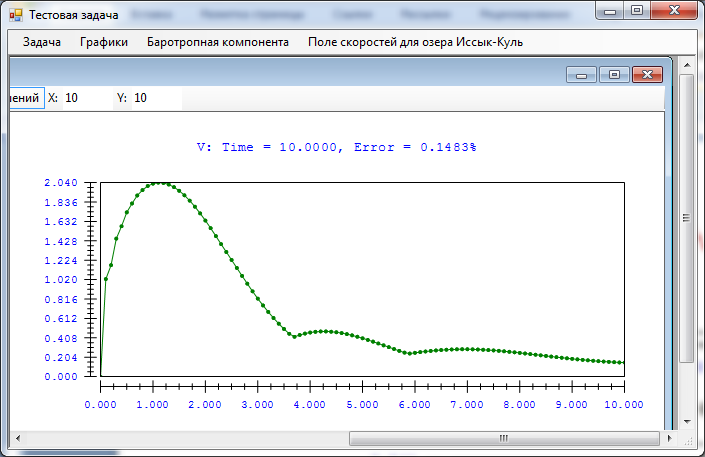


Рисунок 2 – Погрешность *v*-компоненты при , , .

Чтобы исследовать влияние параметров  и  на точность разностной схемы, были проведены эксперименты c различными значениями данных параметров. В таблице 1 приведены максимальные и финальные погрешности вычисления бароклинной компоненты при различных значениях параметров  и  при . Во всех экспериментах с различными параметрами  и  погрешность также достигала определенного максимума, после чего уменьшалась до некоторого уровня и далее практически не изменялась.

Таблица 1 – Эксперименты при .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность *u*, % | | Погрешность *v*, % | |
| Финальная | Максимальная | Финальная | Максимальная |
| , | 0.14 | 1.59 | 0.14 | 2.04 |
| , | 0.03 | 1.77 | 0.04 | 2.20 |
| , | 0.14 | 0.67 | 0.14 | 0.94 |
| , | 0.03 | 0.85 | 0.04 | 1.07 |

Анализируя результаты экспериментов, приведенные в таблице 1, заключаем, что уменьшение шагов по пространственной и по временной сеткам приводит к уменьшению погрешности. Причем увеличение параметра  в большей степени влияет на финальную погрешность, а уменьшение параметра  – на максимальную.

В таблице 2 приведены аналогичные эксперименты для случая . Погрешность ведет себе так же, как и для схемы с параметром .

Таблица 2 – Эксперименты при .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Погрешность *u*, % | | Погрешность *v*, % | |
| Финальная | Максимальная | Финальная | Максимальная |
| , | 0.14 | 0.91 | 0.13 | 0.63 |
| , | 0.03 | 0.73 | 0.03 | 0.60 |
| , | 0.14 | 0.60 | 0.13 | 0.41 |
| , | 0.03 | 0.40 | 0.03 | 0.31 |

Сравнивая таблицы 1 и 2, можем заметить, что

1. схемы при  и  показывают практически одинаковую финальную погрешность;
2. у схемы при  максимальная погрешность меньше в 2-3 раза, чем у схемы при .

**Литература**

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. -Москва: Наука, 1988.-302 с.
2. Ссылка на статью в Вестнике КРСУ.
3. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. -1988. -№ 4. -С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, -1989. -№ I. -С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, -1989. -№ 4. -С. 3-11.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - Москва: Наука, 1978. -592 с.
5. Турдушев И.А., Скляр С.Н. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы второй международной юбилейной конференции, посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета (КРСУ) им. первого президента Б.Н Ельцина и 100-летию профессора Якова Васильевича Быкова. Санаторий «Иссык-Куль Аврора»: 5-7 сентября 2013 года / Под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. – Бишкек: Изд-во Maxprint. Том 2. – С. 214-218.